Faculté des Sciences
Aix Marseille Université

Année universitaire 2023/2024

Site : ☒ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☒ 1$^{\text{er}}$ semestre ☐ 2$^{\text{ème}}$ semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L3 Nom du diplôme : Licence de Mathématiques
Code du module : SMI5U02TL Libellé du module : Analyse Complexe
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Examen - 16 janvier 2024

Chaque exercice vaut 4 points. Toute assertion doit être justifiée de manière claire et concise.

1. Entre les fonctions suivantes de la variable $z = x + iy$, lesquelles sont holomorphes sur tout le plan $\mathbf{C}$?

$$f_1(z) = x^3 + iy^3 - 3ixy, \qquad f_2(z) = \int_0^1 \sin(t^2+1)e^{tz}\,dt.$$

2. Considérons la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-2024n}.$$

   Trouver l'ouvert maximal de $\mathbf{C}$ sur lequel la série converge.
   En notant $f(z)$ la limite, trouver le domaine maximal sur lequel f s'étend en une fonction holomorphe, et classifier les singularités isolées. (Pour les pôles, calculer l'ordre de pôle, mais pas le résidu.)

3. Soit f une fonction entière (=holomorphe sur $\mathbf{C}$) qui satisfait $|f(z^2)| \leq |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbf{C}$. Montrer que f est constante.

4. Calculer

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 1}\,dx.$$

5. Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique qui coincide avec $\sin(\frac{x}{2})$ sur $[-\pi, \pi)$.
   (a) Calculer la série de Fourier trigonometrique

$$Sf(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)$$

   de f.
   [Formule qui peut être utile : $2\sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) - \cos(\frac{\alpha+\beta}{2})$.]
   (b) Pour quelles valeurs de x la série $Sf(x)$ converge vers $f(x)$?
   (c) Calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{16n^4 - 8n^2 + 1}.$$

   En cas de manque de temps, il suffira d'indiquer de façon précise comment parvenir au résultat.

Solutions possibles

1. f_1 ne satisfait pas Cauchy–Riemann (calcul omis), donc elle n'est pas holomorphe.
   Pour f_2 on utilise le théorème de Morera (comme par exemple pour la fonction Γ) : si C est un chemin fermé dans $\mathbf{C}$, on a

$$\int_C f_2(z)\,dz = \int_C \int_0^1 \sin(t^2+1)e^{tz}\,dtdz = \int_0^1 \sin(t^2+1)\int_C e^{tz}\,dzdt = 0.$$

   Ici, on peut échanger les integrations car les deux domaines d'integrations sont compacts, et l'integral interne en dz vaut 0 car $z \mapsto e^{tz}$ est holomorphe. Donc par Morera, f est holomorphe.

2. C'est une série de puissances en z^{-1}, on sait donc que l'ouvert maximale de convergence (existe et) est de la forme $\{z /' |z^{-1}| < R\}$ pour un R
$in[0, +\infty]$. En fait c'est la série geometrique en $-z^{-2024}$ qui converge quand $|-z^{-2024}| < 1$, c.a.d. sur

$$\{z \ : \ |z| > 1\}.$$

La limite vaut $f(z) = 1/(1+z^{-2024}) = \frac{z^{2024}}{z^{2024}+1}$. Elle s'étend donc sur

$$\mathbf{C} - S$$

où S est l'ensemble des zéroos du denominateur, qui sont les solutions de $z^{4048} = 1$ qui ne sont pas solutions de $z^{2024} = 1$, donc

$$S = \{z_i := e^{\pi in/2024} \mid n = 1, 3, \ldots, 2023\}.$$

Les singularités dans ces points sont des poles car f est un quotient de fonctions holomorphes (avec numerateur z^{2024} qui est non-nul en chaque z_i). Pour calculer l'ordre de pole on calcule la multiplicité de zero du denominateur $g(z) = z^{2024} + 1$, en fait on a $g(z_i) = 0$ mais $g'(z_i) = 2024 z_i^{2023} \neq 0$, donc l'ordre de pole c'est 1.

[Remarque : meme si la série d'origine a une infinité de puissances negatives de z, ceci n'impliique pas que le point $z = 0$ est une singularité essentielle, car la série ne converge pas au voisinage de 0 (ce n'est donc pas l'expansion de Laurent en 0.)]

3. Par Liouville il suffit de montrer que f est bornée, en fait on va montrer que si D est n'importe quel disque fermé de rayon $R > 1$, alors f est bornée en valeur absolue par

$$M = \max_{z \in D} |f(z)|.$$

Si $z = re^{i\theta} \in \mathbf{C} - \overline{D(0,2)}$, on consider une racine carrée z_1 de z (c.a.d une solution de $z_1^2 = z$, qui existe bien dans $\mathbf{C}$) : on a alors $|f(z)| = |f(z_1^2)| \leq |f(z_1)|$ et $|z_1| = r^{1/2}$ (plus proche de l'origine que z). On continue en construisant une suite z_n avec $z_{n+1}^2 = z_n$ et donc $|z_n| = r^{1/2^n} \to 1^+$ (quand $n \to \infty$). Par récurrence on a

$$|(fz)| \leq |f(z_n)| \leq M,$$

où la deuxieme inegalité est vraie pour n assez grand, car pour n assez grand on a $z_n \in D$.

4. Comme la fonction $f(z) = \frac{1}{z^4+2z^2+1} = O(z^{-2})$, et sa restriction à $\mathbf{R}$ est paire et jamais nulle, on a

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4+2x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4+2x^2+1}\,dx = \pi i \sum_{\Im(a)>0} \mathrm{Res}_a(f).$$

On a $f = 1/(z^2+1)^2$ donc les poles sont $\pm i$; la somme ci dessus ne porte donc que sur $a = i$ où on a

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-i)^2(2i+z-i)^2} = \frac{1}{(2i)^2(z-i)^2}\left(1 - \frac{z-i}{2i} + O((z-i)^2)\right)^2 \\ &= \frac{1}{-4(z-i)^2}\left(1 - \frac{z-i}{i} + O((z-)i)\right) = \frac{1}{-4(z-i)^2} + \frac{1}{4i(z-i)}. \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Res}_i(f) = 1/4i$ et l'integral vaut $\pi i/4i = \pi/4$.

5. (a) Voir http ://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00129.pdf, exc. 2(3) pour le calcul.
(b) Comme f est C^1 par morceaux, $Sf(x)$ converge vers $f(x)$ exactement aux points où f est continues, c.a.d les $x \in \mathbf{R} - (\pi + 2\pi\mathbf{Z})$.
(c) On utilise l'identité de Parseval, qui relie la somme cherchée (qui par (a) est la somme des carrées des coefficients de Fourier de f, à un multiple près) à $I = ||f||_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x/2)^2\,dx}$.
(L'integrale peut se calculer facilement : par la symetrie $\sin(t) = \cos(\pi/2 - t)$, on a $I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x/2)^2\,dx$; comme $\sin^2 + \cos^2 = 1$, on a alors $2I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1dx = 1$ donc $I = 1/\sqrt{2}$.