Année universitaire 2023/2024

Site : ☒ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☒ 1^{er} semestre ☐ $2^{\text{ème}}$ semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L3 Nom du diplôme : Licence de Mathématiques
Code du module : SMI5U02TL Libellé du module : Analyse Complexe
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Partiel – 5 decembre 2023

Chaque exercice vaut 5 points. Toute assertion doit être justifiée de manière claire et concise.

1. Entre les fonctions suivantes, lesquelles sont holomorphes sur $\mathbf{C}$?

$$f_1(x+iy) = x^2 - y^2 + 5 - 2ixy, \qquad f_2(z) = e^{\overline{z}}, \qquad f_3(z) = \cos(z) - i\sin(z).$$

2. Démontrer ou trouver un contre-exemple :
   (a) Si f est entière et $f(z+1) = f(z+i) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbf{C}$, alors f est constante.
   (b) Si f est entière et $f(z+1) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbf{C}$, alors f est constante.

3. Classifier les singularités des fonctions suivantes ; pour les pôles, trouver leurs ordre de pôle :

$$f(z) = 1/\sin(z) - 1/z, \qquad g(z) = \sin(1/z) - 1/z.$$

4. Pour un $r > 0$ donné, on cherche une fonction holomorphe

$$f_r \colon D(0,r) \to \mathbf{C}$$

telle que

$$f_{|(-r,r)} = \arctan_{|(-r,r)}.$$

(où la notation indique la restriction des fonctions à l'intervalle ouvert $(-r,r) \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.)
   (a) Montrer que si f_r existe alors elle est unique.
   (b) Trouver

$$\sup\,\{r > 0 \mid f_r \text{ existe}\}.$$

[Indice : on a $\arctan'(x) = 1/(1+x^2)$.]

Solutions

1. $f_1(z)$ et $f_2(z)$ ne satisfont pas Cauchy-Riemann (calcul omis) donc elles ne sont pas holomorphes ; $f_3(z)$ est combinaison linéaire de deux fonctions holomorphes donc elle est holomoprhe.
2. (a) Soit $Q = \{0 \leq \Re(z), \Im(z) \leq 1\}$, alors pour tout $z \in \mathbf{C}$ il existe un point $z' \in Q$ et une suite finie de traslations par 1 et i qui envoie z en z'. Soit $M = \max_{z\in Q} |f(z)|$, qui existe parce que Q est compact. Alors pour un $z \in \mathbf{C}$ quelconque on a, avec la notation ci-dessus, $|f(z)| = |f(z')| \leq M$. Donc f est bornée. Par Liouville elle est constante.
   (b) $f(z) = e^{2\pi iz}$ est 1-périodique mais pas constante.
3. Préliminaires. La fonction $1/z$ a un pole simple de residu 1 en $z = 0$ et aucune autre singularité. La fonction $\sin(1/z)$ a une seule singularité en $z = 0$, et le developpement de Laurent autour de 0 est

$$\sin(1/z) = 1/z - 1/(3!z^3) + 1/(5!z^5) + \ldots$$

(obtenu à partir du developpement de $\sin(w)$, qui converge sur $\mathbf{C}$ car sin est entière.)

Donc pour g on a une seule singularité en 0, qui est essentielle car il y a a une infinité de puissances négatives de z avec coefficient non-nul dans le developpement de Laurent.

On sait que $\sin(m\pi) = 0$ pour tout $m \in \mathbf{Z}$. D'ailleurs par $\cos^2 + \sin^2 = 1$ (qui reste valable sur $\mathbf{C}$ par prolongement analytique analogument à l'argument dans 4(a) ci dessous), et $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$, si $\sin(z) = 0$ alors $e^{iz} = \cos(z) = \pm 1$; en passant aux coordonnées polaires, on voit que on n'a que la solution $z = \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$. Les zéros sont tous simples car $\sin'(\pi m) = \cos(\pi m) \neq 0$. Donc $1/\sin(z)$ a un pole simple en πm pour tout $m \in \mathbf{Z}$.

Ceci implique que f a un pole simple en πm pour tout $m \in \mathbf{Z} - \{0\}$. Pour $z = 0$, on a soit un pole simple soit une singularité eliminable. On calcule le residu de $1/\sin(z)$ en 0, il est $1/\sin'(0) = 1$. Donc $Res(f, 0) = 1 - 1 = 0$ c.a.d. le coefficient c_{-1} du developpement de f en 0 est nul et la singularité est donc eliminable.

4. (a) La difference de deux fonctions satisfaisants la condition donnée est nulle sur $(-r, r)$. Comme cet interval n'est pas discret dans $D(0, r)$, qui est un domaine, cette difference doit être identiquement nulle.

   (b) Le sup est 1.

   En fait, la fonction $g(z) = 1/(1 + z^2)$ est holomorphe sur le disque $D = D(0, 1)$, donc elle a une primitive holomorphe f_1 sur D ; et on peut l'ajuster pour qu'on ait $f_1(0) = 0$. Les restrictions de f_1 et de arctan à $(-1, 1)$ sont deux primitives de $1/(1 + x^2)$ sur cet intervalle qui s'annulent en 0, donc elles sont égales.

   D'ailleurs, f_r n'existe pas pour $r > 1$; si elle existait, sa derivée $h(z)$ serait une fonction holomorphe sur $D(0, r)$ dont la restriction à $D(0, 1)$ est $g(z)$. Mais g a un pole en $i \in D(0, r)$. On obtiendrait donc

$$|h(i)| = \lim_{z \to i} |h(z)| = \lim_{z \to i} |g(z)| = +\infty,$$

   une contradiction. (Alternativement : g et h ont la même série de Taylor autour de zéro mais la série de Taylor de h a rayon de convergence au moins r, celle de h a rayon de convergence 1, contradiction.)