Année universitaire 2023/2024

Site : ☒ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☐ 1er semestre ☒ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 1h30
Examen de : M1 Nom du diplôme : Master de Mathématiques
Code du module : Libellé du module : Analyse Complexe
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Contrôle 1 – 21 fevrier 2024

Le barême est donné à titre indicatif. Toute assertion doit être justifiée de manière claire et concise.

1. (4 points.) Entre les fonctions suivantes, lesquelles sont holomorphes sur $\mathbf{C}$?

$$f_1(x+iy) = x^3 + 3xy - iy^3, \qquad f_2(z) = \cos(\overline{z}), \qquad f_3(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^2}.$$

2. (5 points.) Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série de puissances convergente dans $D = D(0,1)$. Montrer que la fonction

$$g\colon D \to \mathbf{C}, \qquad g(z) := e^{f'(z)^2}$$

coincide avec la valeur d'une série de puissances convergente dans D.
[Il n'est pas demandé d'écrire explicitement cette série.]

3. (5 points.) Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert, soit $f\colon U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe, soit $\overline{D} \subset U$ un disque fermé, et soit γ un chemin simple qui parcourt le bord de $\overline{D}$ en sens antihoraire. Montrer que pour tout a dans l'interieur de D et tout entier $n \geq 0$, on a

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz.$$

[Indice : on a vu en cours que ceci est vrai si $n = 0$ ou si a est le centre de $\overline{D}$.]

4. (6 points.) Calculer

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(e^{it}) i e^{it}}{(e^{it} - \pi/4)^4}\, dt, \qquad J = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(e^{it}) i e^{it}}{(e^{it} - \pi/2)^3}\, dt.$$

Solutions possibles (esquisse)

1. f_1 ne satisfait pas Cauchy–Riemann, donc non ; f_2 non plus (en vérifiant Cauchy–Riemann, ou bien : le polynome de Taylor de f_2 d'ordre 2 c'est $1 - \overline{z}^2/2$, qui n'est pas un polynome en la variable z) ; f_3 est une série de puissances dont le rayon de convergence est $+\infty$ (calcul omis) donc elle est holomorphe.
2. f est analytique sur D donc f' l'est aussi, de même f^2 ; la fonction e^w est holomorphe sur $\mathbf{C}$, donc la composition $e^{f'^2}$ est holomorphe sur D. Par une consequence du théorème de Cauchy elle est donnée par une série de puissances convergente sur D.
[Il est laborieux d'étudier directement le rayon de convergence d'une composition de séries de puissances.]
3. Deux possibilités (au moins). Une, on fait comme en cours pour le cas $n = 0$: on prend un petit cercle γ' centré en a, on découpe la difference $\int_\gamma - \int_{\gamma'}$ en une somme d'un certain nombre d'integrales sur chemins fermés contenus dans des rectangles où f est holomorphe, on en déduit que la difference est nulle ; on s'est donc ramenés au cas de γ' où a est le centre, vu en cours.
Une autre, par récurrence sur n. On connait le cas $n = 0$. Pour vérifier le cas $n+1$ on différentie dans la variable a la formule pour n. Du coté droit, on peut échanger integration et dérivée car le domaine d'integration (qui est un intervalle après avoir deballé les définitions) est compact la fonction à integrer est C^1. On vérifie qu'on obtient ce qu'on voulait.

4. Soit C le bord de $D = D(0,1)$ parcouru une fois dans le sens antihoraire. On note que $\pi/4 \in D$, $\pi/2 \notin D$. On identifie

$$I = \int_C \frac{\cos(z)}{(z-\pi/4)^4}\,dz = (2\pi i/3!)\cos^{(3)}(\pi/4) = (\pi i/3)\sqrt{2}/2 = \pi i\sqrt{2}/6$$

et $J = \int_C \sin(z)/(z-\pi/2)^3\,dz = 0$ car la fonction integrée est holomorphe sur $D' = D(0, 1+\varepsilon)$ (et C est contenu dans D').