Année universitaire 2023/2024

Site : ☒ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☐ 1er semestre ☒ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 1h30
Examen de : M1 Nom du diplôme : Master de Mathématiques
Code du module : Libellé du module : Analyse Complexe
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Contrôle 2 – 20 mars 2024

Le barème est donné à titre indicatif. Toute assertion doit être justifiée de manière claire et concise.

1. (6 points.)
   Soit $f\colon \mathbf{C}^\times \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe non-constante telle que pour tout z avec $|z| = 1$, on a $f(z) = f(\overline{z})$.
   Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est nécessairement vraie, nécessairement fausse, ou ni l'un ni l'autre (montrer ou donner un contre exemple) :
   (a) $f(z) = f(\overline{z})$ pour tout $z \in \mathbf{C}^\times$,
   (b) $f(z) = f(1/z)$ pour tout $z \in \mathbf{C}^\times$.

2. (4 points.)
   Trouver toutes les fonctions holomorphes $g\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ qui satisfont :
   — $g(0) = g'(0) = g(1) = 0$, *et*
   — il existe des constantes $A, B > 0$ telles que $|g(z)| \leq A|z|^3$ pour tout $z \in \mathbf{C} - \overline{D(0,B)}$.

3. (5 points.)
   Soit $A = \{z \mid 1/2 \leq |z|| \leq 1\}$, et soit f une fonction holomorphe définie sur un ouvert contenant A. Supposons que
   $$|f(z)| \leq 1/8 \text{ quand } |z| = 1/2, \qquad |f(z)| \leq 1 \text{ quand } |z| = 1.$$
   Montrer que $|f(z)| \leq |z|^3$ pour tout $z \in A$.

4. (5 points.)
   Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$ donné, décrire les possibles singularités en 0 d'une fonction holomorphe $f\colon D(0,1) - \{0\} \to \mathbf{C}$ qui satisfait
   $$|f(z)| \leq |z|^\alpha$$
   pour tout $z \in D(0,1) - \{0\}$.
   (Si entre les possibilité il y a pôle, décrire les possibles ordres de pôle.)