Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Année universitaire 2023/2024

Site : ☒ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☐ 1er semestre ☒ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h45
Examen de : M1 Nom du diplôme : Master de Mathématiques
Code du module : Libellé du module : Analyse Complexe
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Contrôle 3 – 16 avril 2024 - Sujet avec solutions possibles

Le barème est donné à titre indicatif. Toute assertion doit être justifiée de manière claire et concise (en particulier, vérifier les hypothèse des théorèmes utilisés).

1. (3 points.)
   Pour chacune des fonctions suivantes, classifier toutes les singularités isolées. Si la singularité est un pôle, calculer l'ordre de pôle.

$$f_1(z) = \cos(1/z^2), \qquad f_2(z) = 1/\cos(z)^2, \qquad f_3(z) = \frac{z^2}{\cos(z)-1}.$$

   Solution. f_1 n'a une singularité que en $z = 0$. Du developpement de $\cos(t)$ en $t = 0$, convergent sur $\mathbf{C}$, on obtient un développement de Laurent $f_1(z) = 1 - \frac{1}{2z^4} + \frac{1}{24z^8} + \dots$ avec une infinité de puissances negatives de z ; donc $z = 0$ est une singularité essentielle.

   f_2 est une fonction meromoprhe (rapport entre fonctions holomorphes non-nulles), avec poles là où $\cos(z)$ a des zeros, i.e. en $z \in \pi/2 + \pi\mathbf{Z}$. Comme les zeros de cos sont simples, les zéros de $\cos^2$ ont multiplicité deux et les poles de f_2 sont tous d'ordre 2.

   f_3 est mermorphe avec singularités là où $\cos(z) = 1$ i.e. en $z \in \pi\mathbf{Z}$. En $z = k\pi$, $k \neq 0$, on a $z^2 \neq 0$ et la fonction $\cos(z)-1$ s'annule à l'ordre 2 (on a $\cos'(k\pi) = 0$, $\cos''(k\pi) \neq 0$) ; ce sont donc des poles d'ordre 2. Autour de $z = 0$ on a $f_3(z) = z^2/(-z^2/2+O(z^4)) = 1/(-1+O(z^2))$, donc $f_3(z) \to -1$ quand $z \to 0$; donc 0 est singularité éliminable.

2. (2 points.)
   Soit $L = (-\infty, 0] \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ et soit $D = \mathbf{C} - L$. La fonction $f(z) = 1/z$ admet-elle une primitive holomorphe sur D ?

   Solution. On a $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ où $D_1 = \{\Re(z) > 0\}$, $D_2 = \{\Im(z) > 0\}$, $D_3 = \{\Im(z) < 0\}$ sont des rectangles (infinis). Par le théorème du rectangle il y a donc des primitives holomorphes f_i de $1/z$ sur D_i, uniques à constantes près. Soient $D_{i,j} = D_i \cap D_i$ et soientt $c_{1,2} = f_{1|D_{1,2}} - f_{2|D_{1,2}}$, $c_{1,3} = f_{1|D_{1,3}} - f_{3|D_{1,3}}$, deux constantes. Alors les fonctions f_1 sur D_1, $f_2 + c_{1,2}$ sur D_2, et $f_3 + c_{1,3}$ sur D_3 coincident sur les intersections donc se recollent à une fonction f qui est une primite de $1/z$ sur tout D.

   (Noter que dire "il y a une primitive, c'est $\log(z)$" ne veut rien dire car a priori on ne sait pas ce que c'est $\log(z)$ sur D...)

3. (3 points.)
   Soit D un domaine qui contient le disque fermé $\{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}$ et soit $f\colon D - \{1\} \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe avec un pole en $z = 1$. Soit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

   le developpement de Taylor de f autour de $z = 0$.

   (a) Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$?
   (b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\mathrm{Res}_{z=1}(f)$.
   [Indice : considérer la fonction $(z-1)f(z)$.]
   Remarque : il y avait une erreur de signe dans l'énoncé original.

Solution. (a) Comme f est holomorphe sur $D(0,1)$ mais elle ne s'étend pas en une fonction holomorphe sur $D(0,r)$ pour $r>1$ (à cause du pole en 1), le rayon de convergence est 1.
(b) Soit $g(z)=(z-1)f(z)$, on a donc $\mathrm{Res}_{z=1}f=g(1)$ (clair de la définition de résidu), d'ailleurs la série de Taylor de g en 0 est

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z^{n+1}-z^n)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n-1}-a_n)z^n$$

(où on définit $a_{-1}:=0$). L'égalité ci-dessus a un sens pour $z\in D(0,1)$, mais comme g est holomorphe sur le domaine D, sa série de Taylor converge sur le plus grand disque ouvert contenu dans D, qui a rayon $r>1$. (Ceci nécessite d'un petite argument, par exemple : quitte à intersecter D avec $D(0,2)$ on peut le supposer borné ; la fonction $|z|$, vue comme "distance de l'origine", sur le bord ∂D de D prend ses valeurs dans $(1,+\infty)$, mais ∂D est borné et fermé donc compact, donc $|z|$ un min $m>1$ sur ∂D, donc D contient $D(0,m)$.)
Donc on a

$$\mathrm{Res}_{z=1}f=g(1)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n-1}-a_n=\lim_{N\to\infty}-a_0+a_0-a_1+a_1-a_2+\cdots+a_{N-1}-a_N=\lim_{N\to\infty}-a_N.$$

4. (4 points.)
Soient f et g deux fonctions entières (= holomorphes sur $\mathbf{C}$) telles que la composition $g\circ f$ est bornée. Lesquelles des assertions suivantes sont nécessairement vraies ? Pour chacune, démontrer ou trouver un contre exemple.
   (a) f est constante ;
   (b) g est constante ;
   (c) au moins une entre f et g est constante.

Solution. (a) et (b) sont clairement fausses : on peut prendre $f(z)=z$ et $g(z)=3$ ou l'inverse.
(c) est vraie. Par Liouville $g\circ f=c$ est constante, donc $\mathrm{Im}(f)\subset g^{-1}(c)$. Or si g n'est pas constante,$g^{-1}(c)=\{z\,|\,g(z)-c=0\}$ est discret. La façon plus rapide de conclure est la suivante : $\mathrm{Im}(f)$, comme image d'un connexe par une fonction continue, est connexe, mais un ensemble connexe et discret est un point, donc f est constante.
On peut aussi utiliser le théorème de l'image ouverte : si f n'est pas constante, son image est ouverte, mais un ouvert n'es jamais discret (immédiat de la definition de discret).

5. (4 points.)
Combien de racines de l'équation $z^5-10z^3+1=0$ se trouvent dans la couronne $\{1<|z|<2\}$?
[Indice : Rouché.]

Solution. Soit $P(z)=z^5-10z^3+1$ et soit $m(2)$ le nombre de racines (avec multiplicité) de P dans $D(0,2)$, et soit $m(1)$ le nombre de racines (avec multiplicité) de P dans $\overline{D(0,1)}$. Alors on cherche $m=m(2)-m(1)$. Soit $f(z)=-10z^3$ et $g(z)=z^5+1$, donc $P=f+g$. Sur $C(0,2)$ on a $|f(z)|=80$ et $|g(z)|\le 32+1<|f(z)|$, donc P n'a pas de racines sur $C(0,2)$, et par Rouché on a $m(2)=3$, le nombres de racines de f dans $D(0,2)$ (avec multiplicité). Sur $C(0,1)$ on a $|f(z)|=10$ et $|g(z)|\le 1+1<|f(z)|$, donc de façon semblable $m(1)=3$. On conclut $m=3-3=0$, i.e. P n'a pas de racines sur cette couronne.

6. (4 points.)
Calculer

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\,dx.$$

Solution. Comme la fonction $f(z)=z^2/(1+z^4)$ est $O(z^{-2})$, l'integrale converge et vaut $2\pi i\sum_{\mathrm{Im}(a)>0}\mathrm{Res}_{z=a}f$. Les poles de f sont les racines 8-ièmes de l'unité qui ne sont pas des racines 4-ièmes (car $z^4+1=$

$(z^8-1)/(z^4-1))$, i.e. $z_1 = e^{\pi i/4}, z_2 = e^{3\pi i/4}$, $-z_1$, $-z_2$. Seules z_1, z_2 sont dans le démi-plan supérieur. Le résidu en z_1 est

$$z_1^2/4z_1^3 = \frac{e^{2\pi i/4}}{4e^{3\pi i 4}} = e^{-\pi i/4}/4 = \sqrt{2}/8 - i\sqrt{2}/8;$$

en z_2 le résidu est

$$\frac{e^{6\pi i/4}}{4e^{9\pi i/4}} = e^{-3\pi i/4}/4 = -\sqrt{2}/8 - i\sqrt{2}/8.$$

Donc l'integrale vaut

$$2\pi i(\sqrt{2}/8 - i\sqrt{2}/8 + \sqrt{2}/8 - i\sqrt{2}/8) = \sqrt{2}\pi/2.$$