Analyse complexe L3 - TD1
14 septembre 2023

1. (a) Décomposer les nombres suivants en parties réelle et imaginaire :

$$(2-i)/(2-3i), 1/(3-i)^2, i^n, (1+i)^4$$

   (b) Trouver toutes les solutions des équations $z^5 = 2$ et $z^5 = 1+i$
   (Indice : écrire $1+i$ en coordonnées polaires.)

   (c) Déterminer l'ensemble des points du plan complexe vérifiant respectivement :

$$\Im(z^2) > 2, \quad \Im((1+i)z) = 0, \quad |z-i|^2 + |z+i|^2 = 4, \quad |z-i| + |z+i| < 4.$$

2. (a) Vérifier que l'application $\mathbf{R}$-linéaire

$$\ell : \mathbf{C} \to M_2(\mathbf{R}), \qquad a+ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

   satisfait $\ell(zw) = \ell(z)\ell(w)$; et que pour

$$\phi : \mathbf{C} \to \mathbf{R}^2, \quad x+iy \mapsto (x,y)$$

   on a $\ell(z)\phi(w) = \phi(zw)$.

   (b) Soient $a, b, c \in \mathbf{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $az + b\overline{z} + c = 0$ en l'inconnue complexe z admette une unique solution, et dans ce cas déterminer cette solution.
   (Indice : écrire $z, \overline{z}, c$ sous forme de vecteurs réels, et a et b sous forme de matrices réelles.)

3. Rappelons que une fonction $f = u + iv : U \to \mathbf{C}$ (où $U \subset \mathbf{C}$ est un ouvert) est $\mathbf{C}$-dérivable en $z_0 \in U$ si et seulement si elle est $\mathbf{R}$-differentiable en z_0 (c.a.d u, v le sont) et elle satisfait aux équations de Cauchy–Riemann (CR)

$$\begin{cases} u_x(z_0) = v_y(z_0) \\ v_x(z_0) = -u_y(z_0) \end{cases}$$

.

   (a) Supposons que u, v ont leurs derivées partielles en z_0, et que celles-ci satisfont (CR). Est-il nécessairement vraie que f est $\mathbf{C}$-dérivable en z_0 ?

   (b) Montrer que les équations (CR) sont équivalentes à l'equation

$$f_y(z_0) = i f_x(z_0).$$

   (On définit $f_x = u_x + iv_x$, $f_y = u_y + iv_y$.)

4. Entre les fonctions suivantes de la variable $z = x + iy$, lesquelles sont holomorphes (= $\mathbf{C}$-dérivables en tout point) sur $\mathbf{C}$?

$$e^{|z|}, \quad x^2 - y^2, \quad x^2 + 2ixy - y^2.$$

5. Soit
$$P(z)=P(x+iy)=\sum_{0\leq j+k\leq d}^{d} a_{jk}x^j y^k$$
une fonction (**R**-)polynomiale avec $a_{jk}\in\mathbf{C}$. Montrer que $P(z)$ est holomoprhe sur **C** si et seulement si elle est un polynome dans $\mathbf{C}[z]$, c.a.d. ssi on peut écrire $P(z)=\sum_{l=0}^{d}c_l z^l$ pour des $c_l\in\mathbf{C}$.
Indices :
   (a) une direction est facile ;
   (b) pour l'autre direction, on peut considerer les équations (CR) sous la forme $P_y=iP_x$ et se ramener au cas homogène (où $a_{jk}=0$ si $j+k<d$) ; dans ce cas, il faut montrer que P est de la forme $c_d z^d$.
6. Montrer que la somme, le produit, et la composition de deux fonctions holomorphes sont holomorphes (dans leurs domaines).
7. On définit les operateurs suivants :
$$\frac{\partial}{\partial z}:=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}),\qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}:=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}).$$
   (a) Vérifier que $\frac{\partial z}{\partial z}=1$.
   (b) Montrer que une fonction f, définie et **R**-differentiable dans un ouvert $U\subset\mathbf{C}$, est **C**-differentiable (=holomorphe) si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$ dans U.
8. Supposons que $f\colon U\to V$ est une bijection holomorphe entre deux ouverts de **C**, avec $f'\neq 0$ sur U. Montrer que $g:=f^{-1}\colon V\to U$ est holomorphe et $g'(z)=1/f'(g(z))$ pour tout $z\in V$.
9. Le rayon de convergence d'une serie $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ (avec $c_n\in\mathbf{C}$) est défini par
$$R:=(\limsup_{n\to\infty}\sqrt{|c_n||})^{-1}\in[0,+\infty].$$
Montrer que toutes les séries suivantes ont rayon de convergence 1 et que :
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty}nz^n$ ne converge en aucun point du cercle unité ;
   (b) $\sum_{n=0}^{\infty}z^n/n^2$ converge en tout point du cercle unité ;
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty}z^n/n$ converge en tout point du cercle unité, sauf $z=1$. [Indice : montrer que la suite des sommes partielles est de Cauchy]
10. On définit
$$e^z=\exp(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!},\qquad \sin(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},\qquad \cos(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}$$
Montrer que le rayon de convergence des trois est $+\infty$ et que $e^z=\cos(z)+i\sin(z)$.
Montrer aussi que :
   (a) $e^{z+z'}=e^z e^{z'}$
   (b) $|e^z|=e^{\Re z}$, $e^{-z}=1/e^z$.