Analyse complexe L3 - TD2

29 septembre 2023

1. Une fonction *entière* est une fonction holomorphe sur tout le plan $\mathbf{C}$. Trouvez toutes les fonctions entières $f = u + iv$ avec $u(z) = |z|^2$.

2. Trouver l'expansion en série des puissances et le rayon de convergence de

$$f_m(z) = 1/(1-z)^m$$

au voisinage de $z = 0$ (pour tout $m \in \mathbf{N}$).

[Indice : resoudre d'abord pour $m = 1$, puis differentier les deux côtés.]

3. Trouver le rayon de convergence (au voisinage de $z = 0$) de la série

$$L(z) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}.$$

Montrer que pour tout z dans le disque de convergence, on a $e^{L(z)} = 1 + z$. (On pourra donc définir $\log(1+z) := L(z)$ pour z dans ce disque.)

4. Montrer que si U est un domaine et $f : U \to \mathbf{C}$ est une fonction holomorphe avec $|f|$ constante, alors f est constante.

[Indice : si les valeurs de f sont suffisamment proches de 1, alors on peut écrire $f = e^g$ avec $g = \log f$, puis... ; se ramener à ce cas.]

5. Soit D un domaine. On dit que $f : D \to \mathbf{C}$ est *antiholomorphe* si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ in D.
[Pour rappel : $\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$, $\qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$.]
Montrer que si f est à la fois holomorphe et antiholomoprhe alors f est constante.

6. Montrer que la somme et le produit de deux fonctions analytiques sur un domaine sont analytiques.

7. Montrer que une fonction polynomiale P sur $\mathbf{C}$ (au sens réel, c.a.d $P(x+iy) = \sum_{0 \le j+k \le d} a_{jk} x^j y^k$ avec $a_{jk} \in \mathbf{C}$) est antiholomorphe si et seulement si elle est de la forme $P(\bar{z})$ pour un polynome $P \in \mathbf{C}[z]$.

8. L'operateur Laplacian sur $\mathbf{R}^n$ (avec coordonnées $x_1, ..., x_n$) est

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert. Une fonction $u : U \to \mathbf{R}$ de classe C^2 est dite *harmonique* si $\Delta u = 0$.

   (a) Montrer que pour $n = 2$, si on identifie $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ comme d'habitude, on a

$$\Delta = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

   (b) Deduire que si U est un domaine et $f = u + iv : U \to \mathbf{C}$ est holomorphe ou antiholomorphe, alors u et v sont harmoniques.

(c) Trouver toutes les fonctions poynomiales $P(x+iy)=\sum_{0\leq j+k\leq 2} a_{jk}x^j y^k$ (avec $a_{jk}\in \mathbf{C}$) de degré ≤ 2 qui sont harmoniques.

9. Soit f analytique et pas identiquement nulle sur le disque ouvert $D=D(a,r)$. Soit $(\alpha_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes dans D, deux à deux distincts, telle que $f(\alpha_j)=0$ pour tout $j\in\mathbf{N}$. Montrer que $|\alpha_j|\to r$.

10. Soit f analytique sur le disque ouvert $D=D(a,r)$. Montrer que soit $f=0$, soit il existe un $m\in\mathbf{N}$ tel que $f(z)=(z-a)^m g(z)$ avec $g(z)$ analytique sur D et $g(a)\neq 0$.

    L'entier m s'appelle la *multiplicité de zéro* ou l'*ordre* de f at a.

11. Soit $\gamma(t)=re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$, le chemin standard décrivant le cercle de rayon $r>0$. Calculer

$$\int_\gamma f(z)dz$$

pour les fonctions $f(x+iy)=x; y; x^2; y^2; xy$.