Analyse complexe L3 - TD3
20 octobre 2023

1. Soit f analytique sur le disque ouvert $D = D(a, r)$. Montrer que soit $f = 0$, soit il existe un $m \in \mathbf{N}$ tel que $f(z) = (z-a)^m g(z)$ avec $g(z)$ analytique sur D et $g(a) \neq 0$.

   L'entier m s'appelle la *multiplicité de zéro* ou l'*ordre* de f at a.

2. Montrer que si U est un domaine et $f: U \to \mathbf{C}$ est une fonction holomorphe avec $|f|$ constante, alors f est constante.

   [Indice : si les valeurs de f sont suffisamment proches de 1, alors on peut écrire $f = e^g$ avec $g = \log f$, puis... ; se ramener à ce cas.]

3. Montrer que la relation d'équivalence entre chemins est symétrique, reflexive et transitive.

4. Calculer $\int_1^{2i} e^z dz$.

5. Le théorème de Green dit que $P, Q: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sont C^1, et $R = [a, b] \times [c, d]$ est un rectangle avec bord antihoraire γ, alors

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_R (Q_x - P_y) dx dy.$$

   (Ici, $\int_R = \int_c^d \int_a^b$.)

   Utiliser ce théorème pour demontrer que si $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ est holomorphe *et* C^1 alors $\int_\gamma f dz = 0$ pour tout γ comme ci-dessus.