Analyse complexe L3 - TD4

26 octobre 2023

1. (a) Soit $T \subset \mathbf{C}$ un triangle ouvert et $f : T \to \mathbf{C}$ holomorphe. Montrer que f a une primitive et son integral sur n'importe quel chemin fermé est nul.

   (b) Même chose avec T un ouvert *convexe* (:= pour tout $z, w \in T$, le segment droit entre z et w est contenu dans T.)

2. Soit $\log : D(1,1) \to \mathbf{C}$ la fonction définie par la série de Taylor du logarithme au point 1.
   (a) Vérifier que $b^z := e^{\log(b)z}$ définit une fonction de $(b,z) \in D(1,1) \times \mathbf{C}$ qui est holomorphe en chacune des variables .
   (b) Soit $n \geq 1$ un entier. Montere qu'il existe une unique fonction holomorphe $f = \sqrt[n]{\,} : D(1,1) \to \mathbf{C}$ telle que $f(z)^n = z$ et $f(1) = 1$.

3. Soit f une fonction holomoprhe non constante sur $D(0,r)$. Soit $b = f(0)$. Montrer que, quitte à restreindre r, il existe un entier $n \geq 1$, un $c \in \mathbf{C}^\times$, et une fonction holomorphe $g : D(0,r) \to \mathbf{C}$, tels que
   - $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$;
   - $f(z) = b + c g(z)^n$.

   [Indice : écrire d'abord $f(z) = b + cz^n(1 + h(z))$]

4. (Formule de Cauchy generalisée.) Soit $f : U \to \mathbf{C}$ holomorphe et soit D un disque ouvert avec $\overline{D} \subset U$. Soit $a \in D$ (pas nécessairement le centre). Montrer que

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz,$$

   où C est le chemin “bord simple antihoraire de D”.

5. Soit $f : U \to \mathbf{C}$ holomorphe et soit $K \subset U$ un compact. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ les zéros de f dans K (pourquoi sont ils en nombre fini ?). Montrer qu'il existent des uniques entiers $m_i \geq 1$ et une unique fonction holomorphe $g : U \to \mathbf{C}$, tels que

$$f(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_i)^{m_i} g(z)$$

   et g ne s'annule pas sur K.

6. (a) Soit f une fonction entière satisfaisant $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in C(0,R)$. Montrer que les coefficients c_n de son expansion autour de 0 satisfont

$$|c_n| \leq M/R^n.$$

   (b) Soit $P = \sum_{k=0}^{d} c_k z^k$ un polynôme tel que $|P(z)| \leq 1$ pour tout $z \in D(0,1)$. Montrer que on a $|c_k| \leq 1$.