**Analyse complexe L3 - TD5**

À corriger le 7 novembre 2023

1. Soit $D = D(0,1)$ et soit $f : D(0,1) \to \mathbf{C}$ holomorphe. Le *diamètre* de l'image $f(D)$ est
$$d := \sup_{z,w \in D} |f(z) - f(w)|.$$
Montrer que
$$d \geq 2|f'(0)|.$$
[Indice : combiner la formule de Cauchy pour les derivées en 0 de $f(z)$ et $f(-z)$.]
2. (Liouville.) Soit $f$ une fonction entière satisfaisant $|f(z)| \leq A + B|z|^n$ pour des $A, B > 0$ et un entier $n \geq 0$. Montrer que les coefficiicients $c_k$ de son expansion autour de $z = 0$ sont nuls pur $k > n$, et en déduire que $f$ est un polynôme de degré $\leq n$. d
3. Soit $f$ entière avec $|f'(z)| \leq |z|$ pour tout $z$. Montrer que $f(z) = a + bz^2$ avec $|b| \leq 1/2$.
4. (a) Trouver toutes les fonctions holomorphes $f$ définies dans un voisinage de 0 qui satisfont
$$f(n) = f(-n) = 1/n^2$$
pour tout $n \in \mathbf{N}$ suffisamment grand.
   (b) Trouver toutes les fonctions holomorphes $f$ définies dans un voisinage de 0 qui satisfont
$$f(n) = f(-n) = 1/n^3$$
pour tout $n \in \mathbf{N}$ suffisamment grand.
5. Trouver l'expansion de $1/z$ autour de $i$. Quel est le rayon de convergence ?
6. Supposons que $f$ est entière et satisfait à $|f(z)| \geq A|z|^N$ pour une constante $A$ et pour tout $z$ de module suffisamment grand. Montrer que $f$ est un polymnôme de degré $\geq N$.
7. Redemontrer le Théorème fondamental de l'Algèbre à l'aide du Principe du minimum.
8. Montrer que si $f : D \to \mathbf{C}$ est une fonction holomoprhe sur un domaine $D$ et $f(D)$ contient un disque fermé $\overline{D(b,r)}$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(D)$ contient $D(b, r+\varepsilon)$.
9. Classifier toutes les singularités des fonctions suivantes (pour les pôles, determiner aussi l'ordre).
   (a) $f(z) = z/(e^z - 1)$ ;
   (b) $f(z) = (e^z - 1)/(z^5 + 4\pi^2 z^3)$ ;
   (c) $f(z) = 1 + e^{1/(z-1)^2}$ ;
   (d) $f(z) = z \sin(1/z)$.

   [Indice : essayer d'expandre numerateur et denominateurs, si vous soupçonnez un pôle ; si vous soupçonnez une signularité essentielle, utiliser un des resultats qu'on a vu pour exclure le cas pôle / éliminable.]
10. Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe $f : D(0,1) \setminus \{0\}$ telle que $f(z)^n = z$ pour tout $z$ dans le domain.
[Indice : considerer la nature de la singularité en 0 et essayer d'en dériver une contradiction.]