

Analyse complexe L3 - TD6

14 novembre 2023

1. Classifier toutes les singularités des fonctions suivantes (pour les pôles, déterminer aussi l'ordre).

(a) $f(z) = z/(e^z - 1)$;

(b) $f(z) = (e^z - 1)/(z^5 + 4\pi^2 z^3)$;

(c) $f(z) = 1 + e^{1/(z-1)^2}$;

(d) $f(z) = z \sin(1/z)$.

[Indice : essayer d'expandre numérateur et dénominateurs, si vous soupçonnez un pôle; si vous soupçonnez une singularité essentielle, utiliser un des résultats qu'on a vu pour exclure le cas pôle / éliminable.]

2. Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe $f: D(0, 1) \setminus \{0\}$ telle que $f(z)^n = z$ pour tout z dans le domaine.

[Indice : considérer la nature de la singularité en 0 et essayer d'en dériver une contradiction.]

3. (a) Soit $f: D(a, 1) - \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $|f(z)| \leq 1/|z - a|^{1/2}$ pour tout z dans le domaine. Montrer que a est une singularité éliminable.

- (b) Y-a-t-il des fonctions $f \in \mathcal{O}(D(0, 1) - \{0\})$ telles que $|f(z)| \geq e^{1/|z|}$ pour tout z dans le domaine?

4. Calculer

$$\int_{\vec{C}(0,7)} \sin(1/z) dz.$$

5. Trouver le nombre des racines de $z^5 + 2z^4 + 1$ dans $D(0, 1)$.

[Indice : Rouché]

6. Calculer

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+2x^2+x^4} dx$$

(b)

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+2x^2+x^4} dx.$$

7. Calculer

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4.$$