Analyse complexe L3 - TD7
21 novembre 2023

1. Soit C_N le bord d'un carré de coté $2N+1$ centré en 0. Montrer que la fonction $\varphi(z) = \pi\cot(\pi z)$ est bornée sur C_N ; plus précisement on pourra montrer que
$$|\varphi(z)| \leq 1 + \delta_N$$
pour une constante $\delta_N > 0$ qui tend vers 0 quand $N \to \infty$. sur C_N.

2. (La fonction Γ.)
Pour $\Re(z) > 0$, définissons
$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$
   (a) Montrer que l'integrale converge, uniformement en z sur chaque bande $\{\delta \leq \Re(z) \leq A\}$ avec $0 < \delta < A$.
   (b) En déduire que pour tout chemin fermé C dans $\{\Re(z) > 0\}$, on a
$$\int_C \Gamma(z)\, dz = 0.$$
   (c) En déduire que la fonction $\Gamma(z)$ est holomorphe.
   (d) Montrer que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ et que pour tout $n \in \mathbf{N}_{\geq 1}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
   (e) Déduire que par la formule $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$ et recurrence, on peut prolonger Γ en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} - \{-n \,|\, n \in \mathbf{N}\}$.
   (f) Classifier les singularités de Γ en les entiers negatifs.

3. Calculer
$$\int_{C(1,3/2)} \Gamma(z)\, dz.$$

4. (Pour l'enseignant :) Écrire 100 fois : $e_n(x) = e^{inx}$.

5. Calculer les coefficients de Fourier réels a_n, b_n de la fonction 2π-périodique f sur $\mathbf{R}$ qui vaut 1 sur $[0,\pi)$ et -1 sur $[-\pi, 0)$. Écrire explicitement l'évaluation de sa serie de Fourier en $x = 0$ et $x = \pi/2$.

6. (a) Calculer la série de Fourier réelle (trigonométrique) de la fonction $f : \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ telle que $f(x) = 1 - x^2/\pi^2$ sur $[-\pi, \pi)$.
   (b) Étudier la convergence ponctuelle.
   (c) Évaluer Sf en $x = 0$ et retrouver la formule pour $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.
   (d) Appliquer l'identité de Parseval à f et en déduire que $\zeta(4) = \pi^4/90$.